第5课时 分式的加减——分式的混合运算

名师点金

1. **分式混合运算的步骤**：先乘方，再乘除，最后加减，有括号先算括号里面的.
2. **分式混合运算常出现的错误**：(1)运算顺序易错；(2)符号变换易错；(3)错用分配律，只有乘法才有分配律；(4)忽视分数线的括号作用；(5)运算的结果不是最简分式或整式.

Ⅰ 夯实基础·逐点练 (点拨见199页)

随堂导练

知识点1 分式的混合运算

1. (2015·益阳)下列等式成立的是(C)

A. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{3}{a+b}$　　B. $\frac{2}{2a+b}=\frac{1}{a+b}$

C. $\frac{ab}{ab-b^2}=\frac{a}{a-b}$　　D. $\frac{a}{-a+b}=-\frac{a}{a+b}$

2. 计算 $1-\frac{1}{x^2-1}\cdot(x+1)$的结果是(C)

A. $\frac{x+2}{x+1}$　　B. $\frac{x-2}{x+1}$　　C. $\frac{x-2}{x-1}$　　D. $\frac{1}{x-1}$

3. 计算 $\left(\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right)\cdot\frac{4-a^2}{a}$的结果是(A)

A. -4　　B. 4　　C. $2a$　　D. $-2a$

4. 计算 $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{4x}{2-x}$的结果是(B)

A. $\frac{1}{x+2}$　　B. $-\frac{1}{x+2}$　　C. -1　　D. 1

5. (中考·泰安)计算 $\frac{2}{x-1}\div\left(\frac{2}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}\right)$的结果是(A)

A. 2　　B. $\frac{2}{x+1}$　　C. $\frac{2}{x-1}$　　D. -2

6. (2015·黄冈)计算：$\frac{b}{a^2-b^2}\div\left(1-\frac{a}{a+b}\right)=$ $\frac{1}{a-b}$.

7. 计算：$\left(\frac{1}{b}\right)^3\cdot(ab)^2-\left(\frac{a}{b}\right)^3\div\frac{a}{b^2}=$ 0 .

知识点2 分式混合运算的应用

8. (2014·杭州)若 $\left(\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{2-a}\right)\cdot W=1$，则 $W=$(D)

A. $a+2(a\neq-2)$　　B. $-a+2(a\neq2)$

C. $a-2(a\neq2)$　　D. $-a-2(a\neq\pm2)$

9. (2015·安徽)已知实数 a,b,c 满足 $a+b=ab=c$，有下列结论：

①若 $c\neq0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$；②若 $a=3$，则 $b+c=9$；

③若 $a=b=c$，则 $abc=0$；④若 a,b,c 中只有两个数相等，则 $a+b+c=8$.

其中正确的是 ①③④ (把所有正确结论的序号都选上).

10. 一个批发兼零售的文具店规定：凡一次购买铅笔301支以上(包括301支)可按批发价付款；购买300支以下(包括300支)只能按零售价付款. 现有学生小明购买铅笔，如果给九年级学生每人买1支，那么只能按零售价付款，需用(m^2-1)元；如果多买60支，那么可按批发价付款，同样需用(m^2-1)元. 设九年级共有 x 名学生，解答下列问题：

(1)求 x 的取值范围；

(2)每支铅笔的零售价、批发价分别为多少元？(用含 x,m 的式子表示)

(3)每支铅笔的零售价比批发价贵多少元？

解：(1)由题意可得 $\begin{cases}x\leqslant300,\\x+60\geqslant301,\end{cases}$ 解得 $241\leqslant x\leqslant300$.

故 x 的取值范围是 $241\leqslant x\leqslant300$，且 x 为正整数.

(2)每支铅笔的零售价为 $\frac{m^2-1}{x}$ 元，

每支铅笔的批发价为 $\frac{m^2-1}{x+60}$ 元.

(3) $\frac{m^2-1}{x}-\frac{m^2-1}{x+60}=\frac{(m^2-1)(x+60-x)}{x(x+60)}=\frac{60(m^2-1)}{x(x+60)}$(元).

答：每支铅笔的零售价比批发价贵 $\frac{60(m^2-1)}{x(x+60)}$ 元.

易错点1 在进行分式的混合运算时运算顺序出错

11. 计算：$\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\div\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x-2}$.

解：$\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\div\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-1}{x-2}$.

易错点2 在进行分式的混合运算时，错用运算律或计算不彻底造成错误

12. (2015·滨州)计算：$\frac{6-2m}{m^2-6m+9}\div\left(\frac{1}{m-3}-\frac{1}{m+3}\right)$.

解：原式 $=\frac{-2(m-3)}{(m-3)^2}\div\frac{m+3-m+3}{(m+3)(m-3)}=\frac{-2}{m-3}\cdot\frac{(m+3)(m-3)}{6}=-\frac{m+3}{3}$.

趣味数学

有一位老人要将家中11匹马分给3个儿子，老大分得二分之一，老二分得四分之一，老三分得六分之一. 二分之一是5匹半马，总不能把马杀了吧，怎么分呢？ (待续)

Ⅱ 链接中考·真题练 (点拨见200页) 课后导练

命题角度1 利用分式的运算说明求值问题

13. (2015·广元)先化简:$\left(\frac{2x^2+2x}{x^2-1}-\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}\right)\div\frac{x}{x+1}$,然后解答下列问题:

(1)当$x=3$时,求分式的值;

(2)原分式的值能等于-1吗?为什么?

解:(1)$\left(\frac{2x^2+2x}{x^2-1}-\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}\right)\div\frac{x}{x+1}$

$=\left[\frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}\right]\cdot\frac{x+1}{x}$

$=\left(\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{x-1}\right)\cdot\frac{x+1}{x}$

$=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{x-1}$.

当$x=3$时,原式$=\frac{3+1}{3-1}=2$;

(2)如果$\frac{x+1}{x-1}=-1$,那么$x+1=-(x-1)$,解得$x=0$,当$x=0$时,除式$\frac{x}{x+1}=0$,原式无意义,

故原分式的值不能等于-1.

命题角度2 利用分式的定义合理取值求分式的值

14. (2015·邵阳)先化简$\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{x^2-2x}{2}$,再从0,1,2中选取一个合适的$x$值代入求值.

解:原式$=\frac{x-2x+4}{x(x-2)}\cdot\frac{x(x-2)}{2}=\frac{4-x}{2}$,

当$x=1$,原式$=\frac{3}{2}$.

Ⅲ 整合方法·提升练 (点拨见200页) 课后导练

考查角度1 利用分式的运算解求值问题(整体代入法)

15. (2015·乌鲁木齐)先化简,再求值:$\left(\frac{a+2}{a^2-2a}+\frac{1-a}{a^2-4a+4}\right)\div\frac{a-4}{a}$,其中$a$满足$a^2-4a-1=0$.

解:原式$=\frac{(a+2)(a-2)+a(1-a)}{a(a-2)^2}\cdot\frac{a}{a-4}=\frac{1}{(a-2)^2}$,

由a满足$a^2-4a-1=0$得$(a-2)^2=5$,

故原式$=\frac{1}{5}$.

考查角度2 利用运算律或乘法公式进行巧算

16. 计算:$\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{3x}-\frac{x+y}{y}\right)\right]\div\frac{x-y}{x}$.

解:原式$=\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{3x}+\frac{2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{y}\right)\cdot\frac{x}{x-y}=\left(\frac{2}{3x}-\frac{2}{3x}+\frac{2}{y}\right)\cdot\frac{x}{x-y}=\frac{2x}{y(x-y)}$.

17. 计算:$\left[\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}\right]\div\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)$.

解:原式$=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)\div\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}\right)=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

考查角度3 利用补项法解有关分式混合运算的求值问题

18. 已知$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3=0$,且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\neq0$,求$x+y+z$的值.

解:由$x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3=0$,得$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+3=0$,即$\frac{x+z}{y}+1+\frac{y+z}{x}+1+\frac{x+y}{z}+1=0$,$\frac{x+y+z}{y}+\frac{x+y+z}{x}+\frac{x+y+z}{z}=0$.则有$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=0$.因为$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\neq0$,所以$x+y+z=0$.

考查角度4 利用整除的特征求分式中字母的值

19. 已知x为正整数,且$\frac{2}{x+3}+\frac{2}{3-x}+\frac{2x+18}{x^2-9}$也为正整数,求所有符合条件的$x$的值.

解:原式$=\frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)}-\frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{2x+18}{(x+3)(x-3)}=\frac{2(x-3)-2(x+3)+2x+18}{(x+3)(x-3)}=\frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{2}{x-3}$.因为$x$为正整数,且$\frac{2}{x-3}$也为正整数,所以$x-3=1$或$x-3=2$.解得$x=4$或$x=5$.

教你一招

有关分式化简求值的方法:一般是先运用分式运算法则把分式化简为最简分式或整式,然后将已知的数值代入求值.技巧:(1)如果所给的字母的取值比较复杂或是以条件等式的形式给出时,一般考虑用整体代入法;(2)当给的是几个量的比值时,采用设参数法或倒数法.

正在无奈之际,邻居把自己家的马牵来,老大分得二分之一,牵走了6匹;老二分得四分之一,牵走了3匹;老三分得六分之一,牵走了2匹.一共11匹,分完后,邻居把自己的马牵了回去.